NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.
- **Secciones:**

A : Prof. Wilfred Flores.
B : Prof. Cristian Mardones.
C : Prof. Jorge Espinoza.
D : Prof. Walter Chambio
E : Prof. Sebastián Marquez.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
Pregunta 4	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **[15 ptos.]** Calcule los siguientes límites, sin utilizar tablas de valores.

   a) **[8 ptos.]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x + \sin(3x)}{x \cdot \sin(2x) - 3x}$ *b*) **[7 ptos.]** $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x}$

2) **[15 ptos.]**

   a) **[8 ptos.]** Sea $f(x) = x \cdot \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{x}{2}\right) - \sqrt{4 - x^2}$. Muestre que $f'(x) = \operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   b) **[7 ptos.]** Determine $f'(-2)$ si $f(x) = \sin\left(\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)\right)$.

3) **[15 ptos.]** Dada la curva

$$y^2 \cdot \cos(x) = 1 + \sin(x \cdot y),$$

   determine la pendiente de la recta tangente T a la curva en el punto $P = (0, 1)$.

4) **[15 ptos.]** Sea $f(x) = e^{cx} - \ln(1 + x^2)$, donde c es una constante real. Determine el o los valores c para los cuales $f''(0) = 0$.

Pauta:

1) *a*)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{6x+\sin(3x)}{x\sin(2x)-3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{x\cdot\sin(2x)}{x}-\frac{3x}{x}} && \textbf{[3 ptos.]}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{3\sin(3x)}{3x}}{\sin(2x)-3} && \textbf{[3 ptos.]}\\
&= \frac{9}{-3} && \textbf{[1 pto.]}\\
&= -3 && \textbf{[1 pto.]}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x} &= \sqrt{\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}} && \textbf{[3 ptos.]}\\
&= \sqrt{\frac{e^{3/2}}{e^{1/2}}} && \textbf{[3 ptos.]}\\
&= \sqrt{e} && \textbf{[1 pto.]}
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}} && \textbf{[2 ptos.]}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{x}{2(2x+1)}} && \textbf{[2 ptos.]}\\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{(2x+1)}\right]^{\frac{x}{2(2x+1)}} && \textbf{[1 pto.]}\\
&= e^{2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(2x+1)}} && \textbf{[1 pto.]}\\
&= = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}}\\
&= = e^{1/2} = \sqrt{e} && \textbf{[1 pto.]}
\end{aligned}$$

2) *a*)

- $\left(x\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ **[4 ptos.]**

- $\left(\sqrt{4-x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ **[3 ptos.]**

Luego $f'(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ **[1 ptos.]**

. . . .

b) $\left[\sin\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right)\right]' = \cos\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right)\cdot\frac{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'}{\frac{2x+1}{x-1}}$ **[3 ptos.]**

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right)\cdot\frac{\frac{(2x+1)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(2x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{2x+1}{x-1}}$$

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right)\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{2x+1}$$ **[3 ptos.]**

$$= \frac{-3}{(x-1)\cdot(2x+1)}\cdot\cos\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\right) \Longrightarrow f'(-2) = -\frac{1}{3}$$ **[1 pto.]**

. . . .

3) Derivando con respecto a x a ambos lados de la igualdad y despejando y' obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(y^2\cos(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(1+\sin(xy)\right) && \textbf{[2 ptos.]}\\
2yy'\cos(x) - y^2\sin(x) &= (y+xy')\cos(xy) && \textbf{[4 ptos.]}\\
(2y\cos(x) - x\cos(xy))y' &= y\cos(xy) + y^2\sin(x) && \textbf{[2 ptos.]}\\
y' &= \frac{y\cos(xy)+y^2\sin(x)}{2y\cos(x)-x\cos(xy)} && \textbf{[2 ptos.]}
\end{aligned}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la curva en $P=(0,1)$ está dada por $y'(0,1) = \frac{1}{2}$ y su ecuación por $y = \frac{1}{2}x - 1$.

[5 ptos.]

. . . .

4)

- $f'(x) = ce^{cx} - \frac{2x}{1+x^2}$ **[4 ptos.]**

- $f''(x) = \underbrace{c^2e^{cx} - \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}_{\textbf{[6 ptos.]}} = \underbrace{c^2e^{cx} - \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}_{\textbf{[2 ptos.]}}$ **[8 ptos.]**

- $f''(0) = c^2 - 2 = 0$ si y sólo sí $c = \pm\sqrt{2}$. **[3 ptos.]**